Leçon n° 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines et $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F}$ leurs sev associés.

I/ Espaces affines, euclidiens. Notion de distance.

A/ Applications affines. [AUD]

Définition 1 : Appli affine.

Remarque 2 : Ne dépend pas du choix du point de départ mais que de la partie linéaire.

Exemple 3 : Les constantes, appli linéaires, homothéties.

Proposition 4 : Composée d'applications affines.

Corollaire 5 : Groupe affine.

Proposition 6 : Isomorphisme entre groupe affine et groupe linéaire.

Lemme 7 : Lemme de structure appli affine.

Corollaire 8 : Écriture unique d'une appli affine.

Théorème 9 : Théorème de structure des appli affines.

B/ Isométries affines. [AUD]

Définition 10 : Espace affine euclidien et distance.

Définition 11 : Isométries vectorielles et affines.

Proposition 12 : $O(E)$ et $\mathrm{Isom}(E)$ sont des groupes.

Exemple 13 : Les translations, symétries orthogonales et réflexion.

C/ Distance et matrices de Gram. [G]

Définition 14 : Matrice de Gram.

Proposition 15 : Matrice de Gram $\iff$ matrice hermitienne positive.

Théorème 16 : Lien distance et déterminant de Gram.

II/ Étude du groupe orthogonal.

A/ Générateurs et réduction. [PER] [AUD]

Remarque 17 : Le théorème de structure justifie cette étude.

Définition 18 : $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 19 : $O(\mathbb{R}^n) \simeq O_n(\mathbb{R})$ isomorphes.

Proposition 20 : $O(E)$ agit transitivement sur les bases orthonormées.

Définition 21 : $SO(E)$.

Théorème 22 : Centre de $O(E)$ et $SO(E)$.

Définition 23 : Renversements et réflexions.

Théorème 24 : $O(E)$ engendré par réflexions (et majoration nombre) et $SO(E)$ engendré par renversements (et majoration nombre).

Théorème 25 : Réduction des éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

B/ Topologie et structure. [PER] [CAL] [OBJ] [ZQ]

Proposition 26 : Tous ces ensembles sont des sous-groupes.

Proposition 27 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Développement 1

Lemme 28 : Lemme de séparation d'un point et d'un convexe fermé.

Application 29 : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 30 : $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Théorème 31 : Décomposition polaire.

Application 32 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

C/ Conséquences sur le cas affine. [AUD]

Définition 33 : Isométries positives, déplacements.

Proposition 34 : Les éléments de $I_S(\mathcal{E})$ sont engendrés par au plus $n+1$ réflexion.

III/ Classification.

A/ Des isométries du plan. [GRIF] [AUD] [CAL]

Théorème 35 : Classification des éléments de $O_2(\mathbb{R})$.

Théorème 36 : Classification des isométries affines en dimension 2.

Proposition 37 : Les isométries du polygone régulier à n côtés est le groupe diédral D_{2n}.

B/ Des isométries de l'espace. [GRIF] [CAL]

Théorème 38 : Classification des éléments de $O_3(\mathbb{R})$.

Théorème 39 : Classification des isométries affines en dimension 3.

Développement 2

Proposition 40 : Groupe d'isométries positives du cube.

Application 41 : Colorations du cube.

Proposition 42 : Isométries du tétraèdre.

Références :

— [AUD] Audin Géométrie p. 16, p. 51-67 et p. 85
— [GRIF] Grifone Algèbre linéaire p. 395-399
— [G] Gourdon Algèbre p. 263
— [PER] Perrin Algèbre p. 141
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 201 et p. 360
— [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 97
— [ZQ] Zuily-Queffeléc p. 205